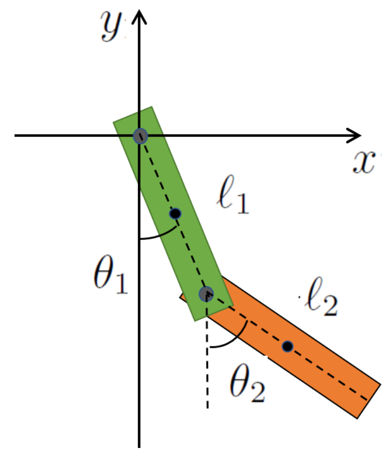
6/21, 2021. Hiizu Nanaknishi

2重振り子の運動方程式



図のような、二つの腕1と2がつながった二重振り子を考える。腕の長さは ℓ_1 と ℓ_2、腕の質量は m_1 と m_2、その重心はそれぞれの中点にあり、重心まわりの慣性モーメントを L_1 と L_2 とする。

2重振り子の配置は、腕が y 軸の負の方向となす角度 θ_1 と θ_2 によって、指定される。

系の運動方程式を、解析力学を用いて、角度 (θ_1, θ_2) と、それに正準共役な運動量 (p_1, p_2) の、4変数1階微分方程式として求めよう。

まず、系のラグランジュ関数 L を求める。腕の重心座標を (x_1, y_1) および (x_2, y_2) とすると、重心は腕の中点にあるので、腕の角度 (θ_1, θ_2) を用いて

$$
\begin{cases} x_1 = & \frac{1}{2}\ell_1 \sin\theta_1, \\ y_1 = & -\frac{1}{2}\ell_1 \cos\theta_1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = & \ell_1 \sin\theta_1 + \frac{1}{2}\ell_2 \sin\theta_2, \\ y_2 = & -\ell_1 \cos\theta_1 - \frac{1}{2}\ell_2 \cos\theta_2 \end{cases}
$$

と表される。この両辺の時間微分を取って、腕の重心の速度 $(\dot{x}_1, \dot{y}_1)$ および $(\dot{x}_2, \dot{y}_2)$ は

$$
\begin{cases} \dot{x}_1 = & \frac{1}{2}\ell_1 \cos\theta_1 \dot{\theta}_1, \\ \dot{y}_1 = & \frac{1}{2}\ell_1 \sin\theta_1 \dot{\theta}_1, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_2 = & \ell_1 \cos\theta_1 \dot{\theta}_1 + \frac{1}{2}\ell_2 \cos\theta_2 \dot{\theta}_2, \\ \dot{y}_2 = & \ell_1 \sin\theta_1 \dot{\theta}_1 + \frac{1}{2}\ell_2 \sin\theta_2 \dot{\theta}_2. \end{cases}
$$

と与えられる。

系の運動エネルギー T は、重心の並進エネルギーと重心まわりの回転運動エネルギーの和としてあらわされるので、上で求めた関係式を用いると、

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}L_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \frac{1}{2}L_2\dot{\theta}_2^2 \\
&= \frac{1}{2}(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) \begin{pmatrix} m_1\left(\frac{1}{2}\ell_1\right)^2 + L_1 + m_2\ell_1^2, & \frac{1}{2}m_2\ell_1\ell_2\cos\left(\theta_1 - \theta_2\right) \\ \frac{1}{2}m_2\ell_1\ell_2\cos\left(\theta_1 - \theta_2\right), & m_2\left(\frac{1}{2}\ell_2\right)^2 + L_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\theta}}^t \hat{A} \dot{\boldsymbol{\theta}}
\end{aligned}
$$

と、対称行列 $\hat{A}$ を用いて、$\dot{\boldsymbol{\theta}} \equiv (\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)$ の2次形式で表される。

ポテンシャルエネルギー U は、

$$
U = -m_1 g \frac{1}{2}\ell_1 \cos\theta_1 - m_2 g \left(\ell_1 \cos\theta_1 + \frac{1}{2}\ell_2 \cos\theta_2\right)
$$

と求まり、この T と U を用いて、系のラグランジュ関数 L は、$\boldsymbol{\theta}$ と $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ の関数として

$$
L(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = T(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) - U(\boldsymbol{\theta})
$$

と与えられる。

正準運動量 $\boldsymbol{p} \equiv (p_1, p_2)$ は、

$$\boldsymbol{p} \equiv \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \dot{\boldsymbol{\theta}}} = \hat{A}\dot{\boldsymbol{\theta}} \tag{1}$$

で、ラグランジュの運動方程式は、正準運動量を用いて

$$\dot{\boldsymbol{p}} = \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \boldsymbol{\theta}}, \tag{2}$$

即ち

$$\begin{cases} \dot{p}_1 &= \dfrac{\partial L}{\partial \theta_1} = -\dfrac{1}{2} m_2 \ell_1 \ell_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - m_1 g \dfrac{1}{2}\ell_1 \sin\theta_1 - m_2 g \ell_1 \sin\theta_1 \\ \dot{p}_2 &= \dfrac{\partial L}{\partial \theta_2} = +\dfrac{1}{2} m_2 \ell_1 \ell_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - m_2 g \dfrac{1}{2}\ell_2 \sin\theta_2 \end{cases}$$

と与えられる。

系を記述する運動方程式は、式 (1) と (2) で与えられる。これは $\boldsymbol{\theta}$ の 2 階の微分方程式なので、数値的に解くときには、

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{\theta}} = \hat{A}^{-1}\boldsymbol{p}, \qquad \dot{\boldsymbol{p}} = \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \boldsymbol{\theta}}\bigg|_{\dot{\boldsymbol{\theta}} = \hat{A}^{-1}\boldsymbol{p}}} \tag{3}$$

として、$\boldsymbol{\theta}$ と $\boldsymbol{p}$ の 4 変数連立 1 階微分方程式の形にする。これを 4 次のルンゲ・クッタ法を用いて解いた。ただし、$\hat{A}^{-1}$ は行列 $\hat{A}$ の逆行列で、

$$対称行列\ \hat{A} = \begin{pmatrix} a, & c \\ c, & b \end{pmatrix}\ に対して、\quad \hat{A}^{-1} = \frac{1}{\det}\begin{pmatrix} b, & -c \\ -c, & a \end{pmatrix}, \quad \det \equiv ab - c^2$$

で与えられる。

この方程式 (3) は、ハミルトンの正準方程式

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \frac{\partial H(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{p}}, \quad \dot{\boldsymbol{p}} = -\frac{\partial H(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{\theta}}; \qquad H(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{p}) \equiv \frac{1}{2}\boldsymbol{p}^t \hat{A}^{-1}\boldsymbol{p} + U(\boldsymbol{\theta})$$

と同じものである。